Systemy ekspertowe

Część czwarta

Generowanie reguł minimalnych

Autor
Roman Simiński

Kontakt

siminski@us.edu.pl
www.us.edu.pl/~siminski

Uczenie maszynowe a eksploracja danych

Uczenie maszynowe

Uczenie maszynowe (ang. *machine learning*) obejmuje problematykę konstruowania programów komputerowych, które uczą się rozwiązywać zadania na podstawie doświadczenia reprezentowanego przez zbiór przykładów.

- *Uczenie nadzorowane* (ang. *supervised learning*) dotyczy poszukiwania hipotez opisujących tzw. pojęcia. Zamiast terminu „pojęcie" używa się terminu „kategoria" lub „klasa".
- Nauczyciel (nadzorca) dostarcza *przykładów* i *kontrprzykładów* wybranego pojęcia (przykłady pozytywne i negatywne).
- Przez hipotezę rozumie się funkcję przypisującą przykładom ich kategorie.
- Wynikiem nadzorowanego uczenia się pojęć jest wybór pewnej hipotezy z przestrzeni możliwych hipotez, która jest uznana za najlepiej opisującą pojęcia na podstawie dostarczonych przykładów uczących

Uczenie maszynowe a eksploracja danych

Koncepcja Data Mining - Eksploracja Danych

Dla potrzeb tych zajęć przyjmijmy:

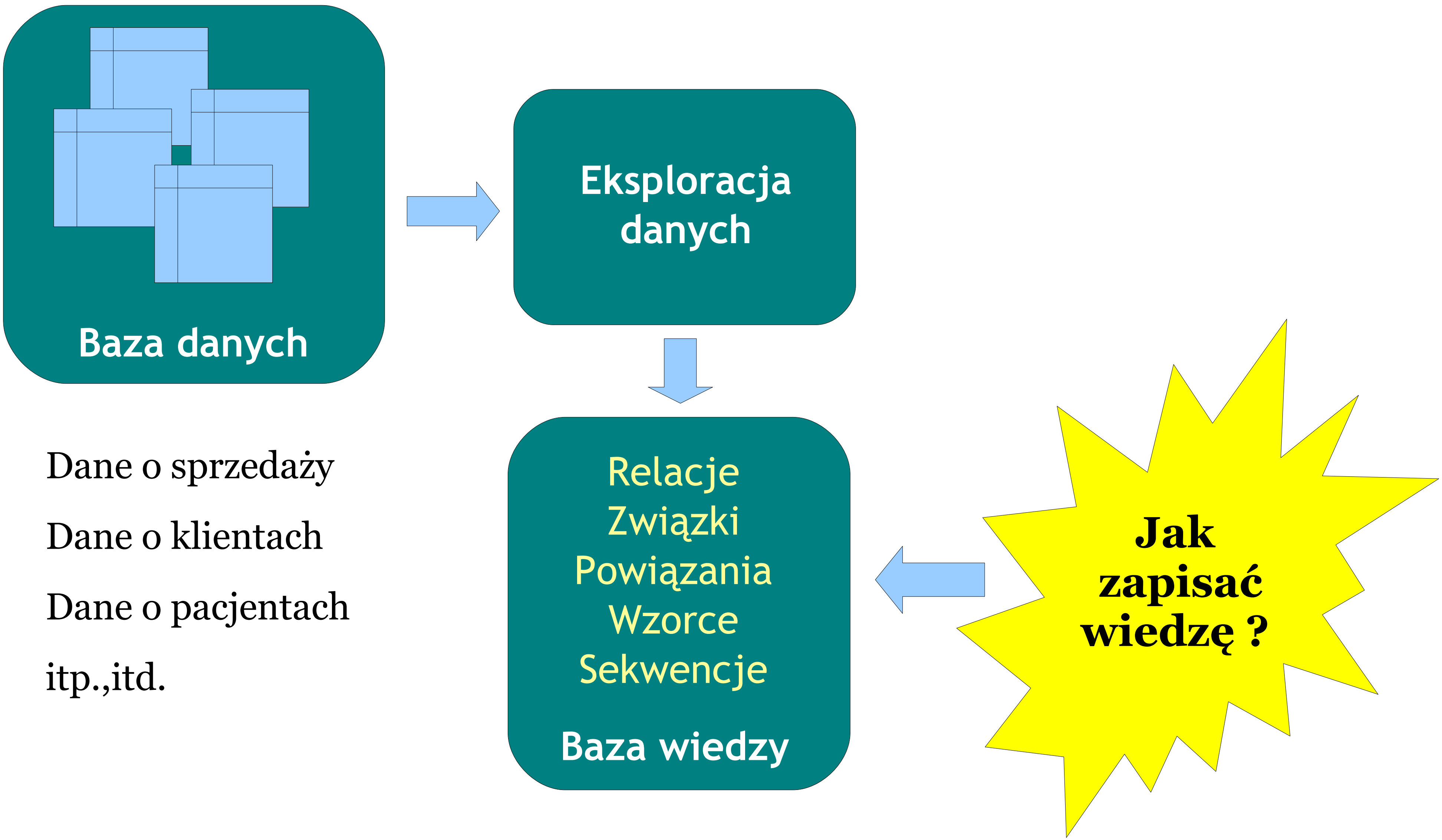
- *Data mining – eksploracja danych – jest dziedziną informatyki zajmującą się odkrywaniem wiedzy zapisanej niejawnie w dużych zbiorach danych oraz przedstawieniem jej w zrozumiały dla użytkownika sposób.*
- Pod pojęciem *wiedzy* rozumieć będziemy *relacje*, *powiązania*, *związki* i *wzorce* odkrywane przez algorytmy eksploracji danych w sposób autonomiczny.

Uczenie maszynowe i *eksploracja danych* mają wiele cech i podejść wspólnych co powoduje częste utożsamianie tych pojęć.

Jednak różnią się one genealogią podejść i wykorzystywanych metod. Wspólnym celem jest jednak najczęściej odkrycie reguł opisujących wiedzę zapisaną w przykładach (danych).

Uczenie maszynowe i eksploracja danych jako proces odkrywania wiedzy

Różne metody realizacji - wspólny cel



Dane o sprzedaży

Dane o klientach

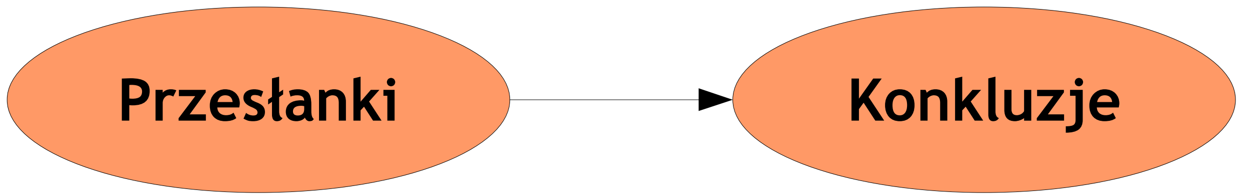
Dane o pacjentach

itp.,itd.

Regułowa reprezentacja wiedzy

Reguły są intuicyjnie najprostszą metodą reprezentacji wiedzy

Istnieje wiele formatów zapisu reguł. Koncepcja jest jednak zwykle ta sama:



„Działanie” reguły odbywa się według wywodzącego się z logiki schematu *modus ponens*:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

Jeżeli p implikuje logicznie q oraz p jest prawdziwe to q jest również prawdziwe.

Regułowa reprezentacja wiedzy

Reguły można zapisywać w różny sposób

- Z wykorzystaniem symbolu implikacji:

  przesłanki → *konkluzje*

- W postaci zbliżonej do instrukcji warunkowej:

  if *przesłanki* then *konkluzje*

- W postaci odwrotnie zapisanej instrukcji warunkowej:

  konkluzje if *przesłanki*

Regułowa reprezentacja wiedzy

Jak zapisywać przesłanki i konkluzje?

- Z wykorzystaniem zmiennych zdaniowych:

  p – procesor się przegrzewa

  q – sprawdź układ chłodzenia

  $$p \rightarrow q$$

- Z wykorzystaniem predykatów:

  $P(x)$ – procesor komputera x się przegrzewa

  $Q(x)$ – sprawdź układ chłodzenia komputera x

  $$P(x) \rightarrow Q(x)$$

- Z wykorzystaniem dwójek *atrybut-wartość*:

  if $stan\_procesora = przegrzany$
  then $akcja\_serwisowa = sprawdź\_układ\_chłodzenia$

Istnieją oczywiście inne formy zapisu literałów reguł.

Regułowa reprezentacja wiedzy

Reguły mogą przyjmować bardziej złożoną postać:

W inżynierii wiedzy wykorzystuje się standaryzowane formaty reguł wywodzące się z logiki:

- Koniunkcyjna postać normalna

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q_1 \vee q_2 \vee \ \ldots \vee \ q_m$$

- Klauzula Horna

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$$

Najczęściej wykorzystuje się reguły posiadające postać klauzuli Horna

Istnieje wiele innych, czasem bardzo „dziwnych” postaci reguł – obowiązujących głównie w obrębie określonych systemów narzędziowych.

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Krótkie przypomnienie

Przypomnijmy, że:

System informacyjny *DT* zdefiniowany jest jako dwójka:

$$DT = (\, U, A \cup \{d\})$$

gdzie

- U jest niepustym, skończonym zbiorem obiektów,
- A jest niepustym, skończonym zbiorem atrybutów.
- $d \notin A$ jest atrybutem decyzyjnym niezaliczanym do zbioru atrybutów A systemu, atrybuty $a \in A$ nazywamy atrybutami warunkowymi.

Zbiór V_a jest dziedziną atrybutu $a \in A$. $V = \bigcup_{a \in A} V_a$.

Definiuje się również funkcję informacyjną

f: $U \times A \rightarrow V$, taką, że $\forall a \in A,\ x \in U\ \ f(a, x) \in \mathrm{V}_{\mathrm{a}}$.

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Krótkie przypomnienie

Przypomnijmy, że tabelaryczna reprezentacja $DT = (U, A \cup \{d\})$:

	C1	C2	S
1	1	Niski	Off
2	1	Wysoki	On
3	2	Niski	Off
4	2	Wysoki	On
5	3	Niski	On
6	3	Wysoki	On
7	4	Niski	On
8	4	Wysoki	On

Atrybuty warunkowe

Atrybut decyzyjny

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Spójność tablicy decyzyjnej

- Tablica decyzyjna $DT = (U, A \cup \{d\})$ jest spójna (inaczej *deterministyczna*) wtedy i tylko wtedy, gdy decyzja d zależy jednoznacznie od zbioru atrybutów A. Gdy tak nie jest, to tablica decyzyjna jest niespójna.
- Decyzja d zależy jednoznacznie od zbioru atrybutów A jeżeli w tablicy DT nie istnieją obiekty, które dla tych samych wartości atrybutów warunkowych posiadają inne wartości atrybutów decyzyjnych.
- Zatem tablica DT jest niespójna, jeżeli zawiera obiekty, które przy tych samych warunkach dają inną decyzję.

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Spójność tablicy decyzyjnej — przykłady

	kolor	wielkość	dojrzałe
x_1	czerwone	duże	tak
x_2	żółte	średnie	tak
x_3	zielone	małe	nie
x_4	zielone	duże	tak
x_5	żółte	średnie	nie
x_6	czerwone	średnie	tak
x_7	żółte	duże	tak
x_8	czerwone	średnie	tak
x_9	żółte	małe	nie
x_{10}	żółte	małe	tak
x_{11}	czerwone	małe	tak
x_{12}	zielone	średnie	nie

Gdy żółte i średnie to dojrzałe czy nie?

	a	*b*	*c*	*d*
x_1	0	0	0	0
x_2	1	1	1	1
x_3	0	0	1	0
x_4	1	1	0	1
x_5	1	1	1	2
x_6	1	0	0	2
x_7	1	1	1	1
x_8	0	1	1	2

Różne wartości atrybutu *d*

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Spójność tablicy decyzyjnej formalnie

Niech dana jest tablica decyzyjna $DT = (U, A \cup \{d\})$. Niech V_d oznacza zbiór wartości atrybutu decyzyjnego d : $V_d = \{ v^1{}_d, v^2{}_d, \ldots, v^r{}_d \}$.

Atrybut decyzyjny d definiuje podział $\mathrm{CLASS}_{DT}(d) = \{ X_1, X_2, \ldots, X_r \}$ zbioru obiektów U, gdzie $X_k = \{ x \in U: f(d, x) = v^k{}_d \}$ dla $1 \leq k \leq r$.

Taki podział $\mathrm{CLASS}_{DT}(d)$ nazywany jest *klasyfikacją obiektów* w tablicy decyzyjnej DT, a X_k jest k-tą klasą decyzyjną.

Zbiór $\mathrm{POS}_B(d) = B_{IND(B)}X_1 \cup B_{IND(B)}X_2 \cup \ldots \cup B_{IND(B)}X_r$ jest B-dolnym przybliżeniem klasyfikacji $\mathrm{CLASS}_{DT}(d)$. Można zdefiniować *współczynnik jakości klasyfikacji*:

$$\gamma(B, d) = \frac{|POS_B(d)|}{|U|}$$

gdzie $|X|$ to liczność niepustego zbioru X

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Spójność tablicy decyzyjnej a uogólniony atrybut decyzyjny

Współczynnik jakości klasyfikacji $\gamma(B, d)$ przyjmuje wartości z zakresu $[0, 1]$.

- Jeśli $\gamma(B, d) = 1$, to klasyfikacja może być w pełni opisana na podstawie atrybutów zbioru B.
- Jeśli $\gamma(B, d) < 1$, to klasyfikacja może być opisana tylko w sposób przybliżony.

Tablica decyzyjna $DT = (U, A \cup \{d\})$ *jest spójna* wtedy i tylko wtedy, gdy d zależy jednoznacznie od zbioru atrybutów A, a zatem $\gamma(A, d) = 1$. Gdy $\gamma(A, d) < 1$ tablica DT *jest niespójna*.

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Spójność tablicy decyzyjnej formalnie, cd...

Zdefiniujmy dla tablicy $DT = (U, A \cup \{d\})$ funkcję zwaną uogólnioną decyzją:

$$\delta_A : U \rightarrow P(V_d)$$

zdefiniowaną dla $\forall x \in U$:

$$\delta_A(x) = \{\ i : \exists x' \in U,\ x'\ IND(A)\ x\ \wedge\ f(d, x') = i\ \}$$

Tablica decyzyjna $DT = (U, A \cup \{d\})$ *jest spójna* jeśli dla każdego obiektu $x \in U$ zachodzi $|\delta_A(x)| = 1$. W przeciwnym wypadku tablica *jest niespójna*.

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Metody usuwania niespójności

- Rozwiązanie problemu przez eksperta dziedzinowego.
- Utworzenie dwóch (lub więcej w przypadku ogólnym) spójnych tablic decyzyjnych, poprzez rozdzielenie sprzecznych obiektów.
- Usunięcie obiektów będących przyczyną niespójności:
  - metoda jakościowa – polega na usunięciu tego obiektu, którego wartość decyzyjna jest „mniej ważąca" – to znaczy mająca mniejszą dokładność dolnego i górnego przybliżenia;
  - metoda ilościowa – polega na pozostawieniu tego obiektu (reguły), dla którego istnieje większa liczba przypadków potwierdzających regułę (większa waga obiektu).
- Tworzenie nowego podziału systemu informacyjnego z wykorzystaniem uogólnionego atrybutu decyzyjnego.

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Reguły decyzyjne

Na podstawie tablicy decyzyjnej $DT = (U, A \cup \{d\})$ można utworzyć zbiór reguł decyzyjnych.

	C1	C2	S
1	1	Niski	Off
2	1	Wysoki	On
3	2	Niski	Off
4	2	Wysoki	On
5	3	Niski	On
6	3	Wysoki	On
7	4	Niski	On
8	4	Wysoki	On

```
if C1=1 ∧ C2=Niski    then S=Off
if C1=1 ∧ C2=Wysoki   then S=On
if C1=2 ∧ C2=Niski    then S=Off
if C1=2 ∧ C2=Wysoki   then S=On
if C1=3 ∧ C2=Niski    then S=On
if C1=3 ∧ C2=Wysoki   then S=On
if C1=4 ∧ C2=Niski    then S=On
if C1=4 ∧ C2=Wysoki   then S=On
```

Naszym celem jest otrzymanie najmniej licznego zbioru reguł o możliwie prostej postaci. Wykorzystamy do tego elementy teorii zbiorów przybliżonych.

Generowanie reguł minimalnych

1. Doprowadź tablicę do spójności, np. wprowadzając uogólniony atrybut decyzyjny.
2. Usuń identyczne obiekty.
3. Utwórz macierz nierozróżnialności
4. Dla każdej wartości atrybutu decyzyjnego:
5. Utwórz uogólnioną macierz nierozróżnialności względem decyzji.
6. Zapisz funkcję nierozróżnialności, zminimalizuj ją.
7. Zapisz regułę decyzyjną na podstawie zminimalizowanej funkcji rozróżnialności.

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Tablica decyzyjna w oryginalnej postaci

U	*A*			
	a	*b*	*c*	*d*
1	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**0**	**1**	**0**	**1**
3	**0**	**0**	**1**	**0**
4	**1**	**1**	**0**	**1**
5	**1**	**1**	**1**	**1**
6	**1**	**1**	**1**	**0**
7	**0**	**0**	**1**	**2**
8	**1**	**0**	**1**	**2**

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Tablica jest niespójna

U	A			
	a	b	c	d
1	**0**	**0**	**0**	**0**
2	**0**	**1**	**0**	**1**
3	**0**	**0**	**1**	**0**
4	**1**	**1**	**0**	**1**
5	**1**	**1**	**1**	**1**
6	**1**	**1**	**1**	**0**
7	**0**	**0**	**1**	**2**
8	**1**	**0**	**1**	**2**

Obiekty powodujące niespójność

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wprowadzamy uogólniony atrybut decyzyjny δ_A

U	A			
	a	b	c	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
5	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
7	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Teraz w tablicy występują powielone obiekty

U	A			
	a	b	c	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
5	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
7	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Eliminujemy powielone obiekty

U	A			
	a	b	c	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Tworzymy macierz nierozróżnialności

U	*A*			
	a	*b*	*c*	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

	1	2	3	4	6	8
1	∅	b	c	ab	abc	ac
2	b	∅	bc	a	ac	abc
3	c	bc	∅	abc	ab	a
4	ab	a	abc	∅	c	bc
6	abc	ac	ab	c	∅	b
8	ac	abc	a	bc	b	∅

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przypomnienie działań w algebrze Boola

* koniunkcja   + alternatywa   ' negacja

- $a * a = a$
- $a + a = a$
- $a + 1 = 1$
- $a + 0 = a$
- $a + a' = 1$
- $a * a' = 0$
- $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$
- $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
- $(a + b) * (a + b + c) = a + b$
- $(a + b) * (a + c) = a + b*c$

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla $\delta_A = \{0\}$ czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A = \{0\}$

Opierając się na uogólnionej macierz nierozróżnialności dla obiektu x_1: $MG(A,\{0\},x_1)$ wyznaczamy funkcję nierozróżnialności $f_{MG(A,\{0\},x1)}$.

	1	2	3	4	6	8
1	∅	b	c	ab	abc	ac

$$f_{MG(A,\{0\},x1)} = b*c*(a+b)*(a+b+c)*(a+c)$$

Minimalizujemy funkcję $f_{MG(A,\{0\},x1)}$

$f_{MG(A,\{0\},x1)}$ = bc(a+b)(a+b+c)(a+c) = (abc + bc)(a+b+c)(a+c) = (abc + abc + abc + abc + bc + bc)(a+c) = (abc + bc)(a+c) = abc + abc + abc + bc = abc + bc = bc(a + 1) = bc

Zatem implikanty pierwsze funkcji $f_{MG(A,\{0\},x1)}$ to $PRIME\_MG(A,\{0\},x_1) = \{bc\}$

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla $\delta_A = \{0\}$ czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A = \{0\}$

Opierając się na implikantach pierwszych $PRIME\_MG(A,\{0\},x_1) = \{bc\}$ i oryginalnej tablicy możemy zapisać regułę minimalną:

$$\boldsymbol{b}{=}0 \land \boldsymbol{c} = 0 \rightarrow \delta_A = \{0\}$$

U	*A*			
	a	*b*	*c*	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla $\delta_A = \{1\}$ czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A = \{1\}$

Opierając się na uogólnionej macierz nierozróżnialności dla obiektu x_2: $MG(A,\{1\},x_2)$ oraz x_4: $MG(A,\{1\},x_4)$, wyznaczamy funkcję nierozróżnialności $f_{MG(A,\{1\},x2)}$ oraz $f_{MG(A,\{1\},x4)}$.

Macierz i funkcja rozróżnialności dla obiektu x_2

	1	2	3	4	6	8
2	b	∅	bc	a	ac	abc

$f_{MG(A,\{1\},x2)} = b^*(b+c)^*(a+c)^*(a+b+c)$

Minimalizujemy funkcję $f_{MG(A,\{1\},x2)}$

$f_{MG(A,\{0\},x1)} = b^*(b+c)^*(a+c)^*(a+b+c) = (b+bc)^*(a+c)^*(a+b+c) = (ab+bc+abc+bc)(a+b+c) = (ab+abc+bc)(a+b+c) = ab+ab+abc+abc+abc+abc+abc+bc+bc = ab+abc+bc = ab(1+c)+bc = ab+bc$

Zatem implikanty pierwsze funkcji $f_{MG(A,\{1\},x2)}$ to $PRIME\_MG(A,\{1\},x_2) = \{ab, bc\}$

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Macierz i funkcja rozróżnialności dla obiektu x_4

	1	2	3	4	6	8
4	ab	a	abc	∅	c	bc

$f_{MG(A,\{1\},x4)} = (a+b)*(a+b+c)*c*(b+c)$

Minimalizujemy funkcję $f_{MG(A,\{1\},x4)}$

$f_{MG(A,\{0\},x1)}= (a+b)(a+b+c)c(b+c)=(a+b)(a+b+c)(bc+c)=(a + ab +ac + ab + b + bc)(bc+c)=$ $abc + ac + abc + abc + abc + ac + abc + abc +bc + bc + bc + bc = abc + ac + bc = bc(a + 1)$ $+ ac = ac + bc$

Zatem implikanty pierwsze funkcji $f_{MG(A,\{1\},x4)}$ to $PRIME\_MG(A,\{1\},x_2) = \{ac, bc\}$

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla $\delta_A = \{1\}$ czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A = \{1\}$

Implikanty pierwsze funkcji $f_{MG(A,\{1\},x2)}$ to $PRIME\_MG(A,\{1\},x_2) = \{ab, bc\}$

Implikanty pierwsze funkcji $f_{MG(A,\{1\},x4)}$ to $PRIME\_MG(A,\{1\},x_4) = \{ac, bc\}$

$$(a=0 \wedge b=1) \vee (b=1 \wedge c=0) \vee (a=1 \wedge c=0) \vee (b=1 \wedge c=0) \rightarrow \delta_A = \{1\}$$

Po uproszczeniu:

$$\mathbf{(a=0 \wedge b=1) \vee (a=1 \wedge c=0) \vee (b=1 \wedge c=0) \rightarrow \delta_A = \{1\}}$$

U	*a*	*b*	*c*	δ_A
	A			
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

$$\mathbf{(a=0 \wedge b=1) \rightarrow \delta_A = \{1\}}$$

$$\mathbf{(b=1 \wedge c=0) \rightarrow \delta_A = \{1\}}$$

$$\mathbf{(a=1 \wedge c=0) \rightarrow \delta_A = \{1\}}$$

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla $\delta_A = \{2\}$ czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A = \{2\}$

Opierając się na uogólnionej macierz nierozróżnialności dla obiektu x_8: $MG(A,\{2\},x_8)$ wyznaczamy funkcję nierozróżnialności $f_{MG(A,\{2\},x8)}$.

	1	2	3	4	6	8
8	ac	abc	a	bc	b	∅

$$f_{MG(A,\{2\},x8)} = (a+c)*(a+b+c)*a*(b+c)*b$$

Minimalizujemy funkcję $f_{MG(A,\{2\},x8)}$

$f_{MG(A,\{2\},x8)} = (a+c)(a+b+c)\ a\ (b+c)\ b = (aa + ab + ac + ac + bc + cc)\ (abb+abc) = (aaabb + aabbb + aabbc + aabbc + abbbc + abbcc + aaabc + aabbc + aabcc + aabcc + abbcc + abccc) = ab + abc = ab(1+c) = ab$

Zatem implikanty pierwsze funkcji $f_{MG(A,\{2\},x8)}$ to $PRIME\_MG(A,\{2\},x_8) = \{ab\}$

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla δ_A ={2} czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A$ ={2}

Opierając się na implikantach pierwszych $PRIME\_MG(A,\{2\},x_8) = \{ab\}$ i oryginalnej tablicy możemy zapisać regułę minimalną:

$$\boldsymbol{a}=1 \wedge \boldsymbol{b}=0 \rightarrow \delta_A=\{2\}$$

U	A			
	a	b	c	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla $\delta_A = \{0, 2\}$ czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A = \{0, 2\}$

Opierając się na uogólnionej macierz nierozróżnialności dla obiektu x_3: $MG(A,\{0, 2\},x_3)$, wyznaczamy funkcję nierozróżnialności $f_{MG(A,\{0,2\},x3)}$.

	1	2	3	4	6	8
3	c	bc	∅	abc	ab	a

$f_{MG(A,\{0, 2\},x3)} = c*(b+c)*(a+b+c)*(a+b)*a$

Minimalizujemy funkcję $f_{MG(A,\{0, 2\},x3)}$

$f_{MG(A,\{0, 2\},x3)} =$ c(b + c)(a + b + c)(a + b) a = (bc+c) (a + ab + ac+ ab + ab + abc) = (abc + abc + abc+ abc + abc + abc + ac + abc + ac+ abc + abc + abc) = abc + ac = ac(b+1) = ac

Zatem implikanty pierwsze funkcji $f_{MG(A,\{0, 2\},x3)}$ to $PRIME\_MG(A,\{0, 2\},x_3) = \{ac\}$

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla δ_A ={0, 2} czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A$ ={0, 2}

Opierając się na implikantach pierwszych $PRIME\_MG(A,\{0, 2\},x_3) = \{ab\}$ i oryginalnej tablicy możemy zapisać regułę minimalną:

$$\boldsymbol{a}=0 \wedge \boldsymbol{c}=0 \rightarrow \delta_A=\{0, 2\}$$

U	A			
	a	b	c	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla $\delta_A = \{0, 1\}$ czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A = \{0, 1\}$

Opierając się na uogólnionej macierz nierozróżnialności dla obiektu x_6: $MG(A,\{0, 1\}, x_6)$, wyznaczamy funkcję nierozróżnialności $f_{MG(A,\{0,1\},x6)}$.

	1	2	3	4	6	8
6	abc	ac	ab	c	∅	b

$f_{MG(A,\{0,1\},x6)} = (a+b+c)*(a+c)*(a+b)*c*b$

Minimalizujemy funkcję $f_{MG(A,\{0,1\},x6)}$

$f_{MG(A,\{0,1\},x6)} = = (a+b+c)(a+c)(a+b)cb = (a+ ba+ ca + ac +bc +c) (abc + bc) = (abc+ abc+ abc + abc +abc +abc + abc+ abc+ abc + abc +bc +bc) = abc+bc= bc(1+a) = bc$

Zatem implikanty pierwsze funkcji $f_{MG(A,\{0,1\},x6)}$ to $PRIME\_MG(A,\{0, 1\}, x_6) = \{bc\}$

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Wyliczamy reguły minimalne dla $\delta_A = \{0, 1\}$ czyli reguły postaci $\alpha \Rightarrow \delta_A = \{0, 1\}$

Opierając się na implikantach pierwszych $PRIME\_MG(A, \{0, 1\}, x_6) = \{bc\}$ i oryginalnej tablicy możemy zapisać regułę minimalną:

$$\boldsymbol{b}=1 \wedge \boldsymbol{c}=1 \rightarrow \delta_A = \{0, 1\}$$

U	*A*			
	a	*b*	*c*	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

Od tablicy decyzyjnej do reguł

Generowanie reguł minimalnych - przykład

Otrzymujemy następujące reguły minimalne:

$b=0 \wedge c=0 \rightarrow \delta_A=\{0\}$

$(a=0 \wedge b=1) \vee (a=1 \wedge c=0) \vee (b=1 \wedge c=0) \rightarrow \delta_A=\{1\}$

$a=1 \wedge b=0 \rightarrow \delta_A=\{2\}$

$a=0 \wedge c=0 \rightarrow \delta_A=\{0, 2\}$

$b=1 \wedge c=1 \rightarrow \delta_A=\{0, 1\}$

U	A			
	a	b	c	δ_A
1	**0**	**0**	**0**	**{0}**
2	**0**	**1**	**0**	**{1}**
3	**0**	**0**	**1**	**{0, 2}**
4	**1**	**1**	**0**	**{1}**
6	**1**	**1**	**1**	**{1, 0}**
8	**1**	**0**	**1**	**{2}**

Lub w postaci zbliżonej do klauzul Horna:

1: $b=0 \wedge c=0 \rightarrow \delta_A=\{0\}$

2: $a=0 \wedge b=1 \rightarrow \delta_A=\{1\}$

3: $a=1 \wedge c=0 \rightarrow \delta_A=\{1\}$

4: $b=1 \wedge c=0 \rightarrow \delta_A=\{1\}$

5: $a=1 \wedge b=0 \rightarrow \delta_A=\{2\}$

6: $a=0 \wedge c=0 \rightarrow \delta_A=\{0, 2\}$

7: $b=1 \wedge c=1 \rightarrow \delta_A=\{0, 1\}$