

Reguły stosowane w metodzie założeniowej

Reguły pierwotne

(RO) Reguła odrywania. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.

$$\begin{array}{ccc} ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q & \text{lub} & \frac{p \rightarrow q}{p} \\ & & \hline & & q \end{array}$$

(DK) Reguła dołączania koniunkcji. Do dowodu wolno dołączyć koniunkcję, o ile oba jej człony należą do dowodu.

$$\begin{array}{ccc} (p) \wedge (q) \rightarrow (p \wedge q) & \text{lub} & \frac{p}{q} \\ & & \hline & & p \wedge q \end{array}$$

(OK) Reguła opuszczania koniunkcji. Jeśli do dowodu należy koniunkcja, to wolno dołączyć do dowodu każdy z jej członów.

$$\begin{array}{ccc} (p \wedge q) \rightarrow p \\ (p \wedge q) \rightarrow q & \text{lub} & \frac{p \wedge q}{p} \\ & & \hline & & p \wedge q \\ & & \hline & & q \end{array}$$

(DA) Reguła dołączania alternatywy. Do dowodu wolno dołączyć alternatywę, o ile któryś z jej członów należy do dowodu.

$$\begin{array}{ccc} p \rightarrow (p \vee q) \\ q \rightarrow (p \vee q) & \text{lub} & \frac{p}{p \vee q} \\ & & \hline & & q \\ & & \hline & & p \vee q \end{array}$$

(OA) Reguła opuszczania alternatywy. Jeśli do dowodu należy alternatywa oraz negacja jednego z jej członów, to do dowodu wolno dołączyć drugi człon tej alternatywy.

$$\begin{array}{ccc} ((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p \\ ((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q & \text{lub} & \frac{p \vee q}{\neg q} \\ & & \hline & & p \\ & & \hline & & p \vee q \\ & & \hline & & \neg p \\ & & \hline & & q \end{array}$$

(DR) Reguła dołączania równoważności. Do dowodu wolno dołączyć równoważność, o ile należy do dowodu implikacja, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem — drugi jej człon, jak i implikacja odwrotna.

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \quad \text{lub} \quad \frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}$$

(OR) Reguła opuszczania równoważności. Jeśli do dowodu należy równoważność, to wolno dołączyć do dowodu zarówno implikację, której poprzednikiem jest pierwszy człon tej równoważności, a następnikiem — drugi jej człon, jak i implikację odwrotną.

$$\begin{array}{l} (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \\ (p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p) \end{array} \quad \text{lub} \quad \frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q} \quad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p}$$

W dowodach złożeniowych możemy stosować prawa logiczne oraz formuły, których niezawodność została dowiedziona.

(PPN) Prawo podwójnej negacji:

$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

(DM) Prawa De Morgana:

$$\begin{array}{l} \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q \end{array}$$

(EI) Prawo eliminacji implikacji:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$$

Reguły wtórne

W dowodach złożeniowych możemy stosować reguły wtórne, których niezawodność możemy dowieść poprzez zastosowanie reguł pierwotnych. Przykład:

(MT) Reguła modus tollens. Jeśli do dowodu należy implikacja oraz jej poprzednik, to do dowodu wolno dołączyć następnik tej implikacji.

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p \quad \text{lub} \quad \frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$

Dowód:

- | | |
|----------------------|-----------------------------|
| 1. $p \rightarrow q$ | złożenie |
| 2. $\neg q$ | założenie |
| 3. $\neg\neg p$ | założenie dowodu nie wprost |
| <hr/> | |
| 4. p | OPN 3 |
| 5. q | RO 1,4 |
| 6. $\neg q \wedge q$ | DK 2, 5 sprzeczność |